Wprowadzenie do chaosu
Autor tekstu: **Anna Słota**

Słowo chaos w języku potocznym ma znaczenie dużego nieuporządkowania, zamieszania wręcz. Często używamy tego słowa także na określenie tego, co było przed powstaniem naszego świata. Jeżeli czegoś (jakiegoś zjawiska) nie potrafimy ogarnąć wzrokiem, czy umysłem, najprościej określić to zjawisko słowem „chaos". Jako że tekst ten ma omawiać osiągnięcia matematyki, zastanówmy się jak matematyka opisuje chaos oraz jakie spostrzeżenia, doświadczenia oraz domysły doprowadziły do rozwinięcia się matematycznej teorii chaosu **[1]**.

Oznaki wszechobecnego chaosu można zauważyć w tak różnych dziedzinach jak kardiologia, socjologia, ekologia, kosmologia, czy materiałoznawstwo, chociaż najczęściej w potocznym rozumieniu mówimy o chaosie w kontekście meteorologii. Głównie dlatego, że pogoda i zmagania się z nią to nasza codzienność, a skala chaosu występującego w przewidywaniu pogody jest widoczna na co dzień. Natomiast w kosmologii skala jest olbrzymia, a milion lat to za mało żeby zauważyć chaos w ruchu planet, pojawia się on dopiero w „obserwacjach" prowadzonych na przestrzeni dziesiątek lub setek milionów lat. W każdym z tych przypadków różne są skale mechanizmów wzmacniających, różne są także wartości czasów charakterystycznych tych zjawisk **[2]**. Czasem charakterystycznym jest okres potrzebny na dziesięciokrotne powiększenie odchylenia początkowego a układ jest układem chaotycznym, gdy wzmacniane są małe różnice początkowe. W przypadku gdy, zgodnie z naszą intuicją, duże odchylenia wartości początkowych dają równie duże odchylenia na końcu, nie doszukujemy się oznak chaosu.

Rozwój teorii chaosu to osiągnięcie nauki XX wieku. Jest on nierozerwalnie związany z powszechnym wykorzystaniem komputerów, które nie tylko są w stanie wykonywać żmudne obliczenia, ale także przedstawiać wyniki tych obliczeń w postaci graficznej.

Myśl ludzka zawsze dążyła do poznania kompletnego opisu świata i praw nim rządzących. Opis ten miał być na tyle dokładny, aby nie tylko ułatwiał zrozumienie otaczającego świata ale także pozwolił przewidywać niektóre zjawiska natury (np. zaćmienie słońca). Już na długo przed początkiem naszej ery na podstawie prowadzonych obserwacji i ich matematycznego zapisu konstruowane były urządzenia umożliwiające odtwarzanie ruchu planet i chociaż dzisiaj wiemy, że konstrukcje te były błędne to jednak pozwalały przewidywać pewne wydarzenia z dużą dokładnością. Żyjący wówczas uczeni i myśliciele interesowali się chętnie obiektami kosmicznymi, bo tam szukali potwierdzenia boskiego rodowodu wszechświata, a co za tym idzie przyczyny wszystkich rzeczy. Dopiero około XVII wieku naszej ery uczeni „zeszli na ziemię" i zaczęli badać ziemskie obiekty i prawa ich ruchu, "...*rozpoczął się proces przejścia od starożytnego mistycyzmu do nowożytnej nauki*" **[3]**. Galileusz odkrył, w jaki sposób wpływa na spadające ciało ziemska grawitacja. Mógł on zająć się opisem ruchu ciał, bo wykorzystał wahadło do pomiarów czasu, w którym ruch ten się odbywa. Dzięki temu odkrył, że siła oddziałująca na ciało powoduje jego przyspieszenie, odczucie ruchu jest względne, energia całkowita ciała jest stała oraz to że ciała spadają z taką samą prędkością (opór powietrza powoduje, że nasze codzienne obserwacje wskazują na coś innego). Osiągnięcia Newtona to rozważania nad ruchem ciała pod wpływem sumy różnych sił. W swych badaniach wykorzystywał on możliwość geometrycznego przedstawienia problemu dynamicznego. Badając zmiany ruchu w małych odstępach czasu dał podłoże do rozwoju rachunku różniczkowego, wykazując, że metody rachunku różniczkowego (rozwinięte potem w znaczący sposób przez Eulera) są najbardziej odpowiednie do opisu i zrozumienia przyrody. Odkryte przez siebie trzy prawa ruchu ciał zastosował do ruchu planet, dzięki czemu uściślił opis tego ruchu podając również wiele nieznanych wcześniej szczegółów, często poprawiając wyniki uzyskane przez Keplera. Postulował możliwość wyznaczenia stanów przyszłych na podstawie informacji o stanie bieżącym za pomocą dobrze określonego układu równań. Taką postawę filozofia nazywa determinizmem.

Kolejnym z wielkich, którego wkładu w tworzenie istotnej matematyki nie sposób pominąć, był d'Alembert. Przeprowadził on ogólną analizę drgającej struny, przy czym ograniczył się do badania takich drgań, których amplituda jest mała, co pozwoliło na pominięcie członów komplikujących opis ruchu **[4]**. Podał równanie różniczkowe cząstkowe, które spełniają drgania struny. Wykazał także, że równanie to jest spełnione przez superpozycję fal o dowolnym kształcie poruszających się w przeciwnych kierunkach. Te odkrycia zastosowane do fal dźwiękowych w krótkim czasie doprowadziły do rozwoju teorii akustyki. Równolegle zajmowano się także dynamiką płynów. Euler rozważając zarówno wodę, jak i powietrze opracował układ równań różniczkowych cząstkowych ruchu płynu bez lepkości. Potem matematycy podejmowali się analizy coraz trudniejszych zagadnień — przepływu ciepła, sprężystości materiałów i jako wnioski z tych rozważań wyłaniały się równania różniczkowe, które te zjawiska opisują.

Każdy, kto zetknął się z równaniami różniczkowymi wie, że możliwość ich rozwiązania nie jest oczywista. Można podać ich uproszczony podział na takie, które można rozwiązać bez trudu, takie, o których wiemy, że ich rozwiązanie istnieje, ale nie potrafimy ich rozwiązać, oraz takie, które nie mają rozwiązania. Obecnie rozwiązań równań różniczkowych tego drugiego typu pomagają nam szukać metody numeryczne.

Istotnym wkładem Lagrange'a w rozwój matematyki było dokonanie podziału energii całkowitej na dwie składowe: energii potencjalnej związanej z położeniem (wysokością) oraz energii kinetycznej związanej z ruchem. Uogólnił on także równania ruchu, które do tej pory były ściśle związane z przyjętym układem współrzędnych. Zaletą tych uogólnionych równań była ich prostota. Natomiast Hamilton stworzył konstrukcję wiążącą współrzędne układu dynamicznego z pędem tego układu, zwaną hamiltonianem układu. Hamiltonian określa całkowitą energię układu fizycznego **[5]**.

Powyższe rozważania dotyczyły układów deterministycznych, ale jest wiele zjawisk, które wydają się przypadkowe lub są na tyle złożone, że ich opis siłą rzeczy musi być uśredniony. O zachowaniach takich układów mówi nam prawdopodobieństwo i statystyka.

Pierwszy swoje spostrzeżenia dotyczące prawdopodobieństwa nabyte podczas gier hazardowych spisał Cardano. Definicję wartości prawdopodobieństwa podał Laplace. Liczenie prawdopodobieństwa możliwych wyników rzutu skończoną ilością monet ułatwił trójkąt Pascala. W wyniku badania statystycznych własności układów doszło do opisu rozkładu normalnego, który zastosowano z powodzeniem w naukach społecznych. Mówimy, że badana cecha ma rozkład normalny, gdy poszczególne jej wartości skupiają się wokół jakieś wartości średniej. Maxwell zastosował metody statystyki matematycznej do tak złożonego układu, jakim jest gaz, chociaż podlega on prawom deterministycznym. Potem statystyka rozwinęła się w stochastykę, co pozwoliło na sformułowanie praw, jakimi rządzi się przypadek. Proste układy opisywane były równaniami deterministycznymi, złożone opisywała stochastyka. Na pewnym etapie te dwie metody opisu nie miały ze sobą nic wspólnego.

Bardzo wszechstronnym matematykiem był Poincaré. Zajmował się na przełomie XIX i XX wieku wszystkimi znanymi wówczas dziedzinami matematyki. Jest twórcą topologii, zwanej nauką o ciągłości. W kręgu jego zainteresowań znalazły się problemy stabilności, a także opis ruchu trzech ciał, gdzie postulował możliwość istnienia okresowych rozwiązań równań tego ruchu. Opracował metody badania tej okresowości. Zastosował swoje spostrzeżenia do modelu zredukowanego do dwóch ciał i poruszającego się w ich polu grawitacyjnym ciała o znacznie mniejszych rozmiarach w stosunku do pozostałych. Odkrył, że ruch tego ciała charakteryzuje się bardzo skomplikowaną dynamiką. Było to pierwsze świadome spotkanie człowieka z chaosem, który jeszcze wtedy nie został nazwany.

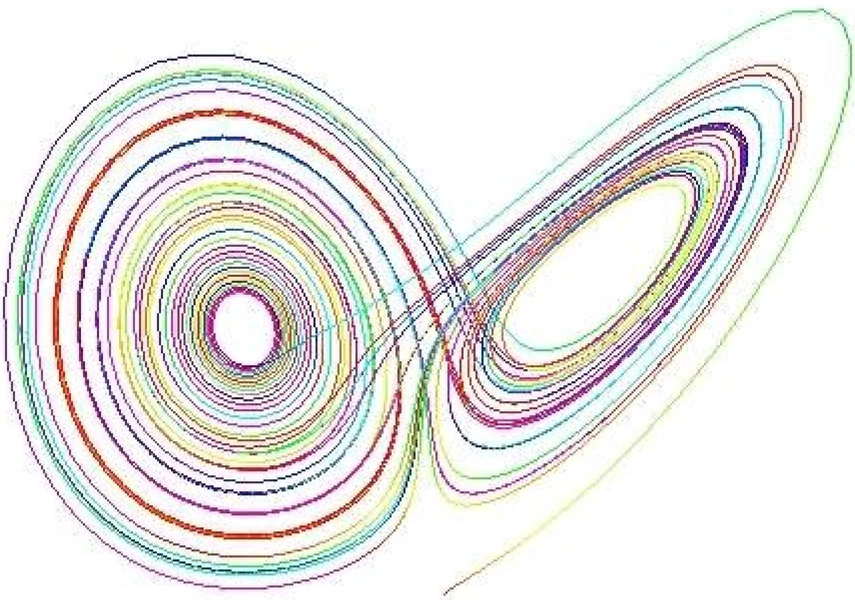
Pogoda jest zjawiskiem, które obserwowano od dawna, gromadzono te obserwacje, ale dopiero na początku XX wieku zaczęto opisywać je w sposób statystyczny dla celów naukowych **[6]**. Jednym z pierwszych, który doszedł do wniosku, ze takie dane mogą posłużyć do formułowania prognoz długoterminowych był Mauchly. Prognozy takie miały duże znaczenie, na przykład dla rolnictwa. Problemem była jednak możliwość przetworzenia olbrzymiej ilości danych obserwacyjnych dla potrzeb prognozowania. Potrzebne było urządzenie, które można by było zaprogramować, które wykonywałoby te obliczenia w krótkim czasie oraz przechowywałoby ich wyniki z możliwością wykorzystania do kolejnych obliczeń. Zbudowano takie urządzenie na bazie lamp próżniowych **[7]**. Nazwano je ENIAC, a całą klasę tych urządzeń — komputer.

Już jako dziecko obserwacjami pogody zajmował się Lorenz. Pracując potem w MIT miał możliwość korzystania z komputera Royal BcBee. Zaprogramował swój komputer tak, aby co minutę otrzymywać dane. Obserwatorów zdumiewał fakt, całkowitego braku okresowości. Żaden zestaw danych nigdy się nie powtórzył, chociaż niekoniecznie różnice były duże. Lorenz symulował zmienność pogody w czasie. Zaprogramowane zostały równania wyrażające zależności między ciśnieniem a temperaturą i prędkością wiatru. Równania te nie były rzeczywistym obrazem zjawisk fizycznych a jedynie ich uproszczeniem **[8]**, zachowywały się jednak podobnie do rzeczywistej pogody, pozostawały nieliniowe i jak się okazało były wystarczająco trafne, aby uchwycić istotę tych zjawisk - dużą wrażliwość na warunki początkowe. Odkrycie tej wrażliwości nastąpiło, gdy Lorenz chcąc skrócić sobie oczekiwanie na wyniki obliczeń dotyczące dłuższego okresu wprowadził jako wartości początkowe wyniki pośrednie otrzymane podczas jednej z wcześniejszych sesji. Po pewnym czasie od wystartowania programu Lorenz zauważył, że drukowane wartości liczbowe nie pokrywają się z tymi z poprzedniej sesji, a prowizoryczne wykresy się rozchodzą. Dopiero po dłuższej analizie zorientował się, że komputer dokonywał obliczeń z dokładnością do określonej liczby cyfr, ale Lorenz wprowadzając otrzymane wyniki jako dane początkowe nowych obliczeń obciął je do mniejszej liczby cyfr **[9]**, zgodnie z wartościami zapisanymi na wydrukach. Dla tych niewielkich różnic zadziałały mechanizmy wzmacniające. Lorenz zrozumiał jednocześnie, dlaczego prognozy długoterminowe są skazane na niepowodzenie.

Należy w tym miejscu przytoczyć fakt braku możliwości wykonania dokładnych pomiarów wielkości, które mają być danymi wejściowymi takich symulacji. Gdyby nawet taki pomiar był możliwy to nie miałoby większego sensu, a przede wszystkim nie byłoby możliwe wprowadzanie takich nieskończonych (rzeczywistych) wartości w symulacjach komputerowych. Komputer bowiem musi każdą taką liczbę przechowywać. Zwróćmy też uwagę na mnożenie takich długich liczb: mnożąc dwie liczby o *n* cyfrach w wyniku uzyskujemy liczbę mającą 2n lub 2n-1 cyfr i to już w pierwszym kroku obliczeń, a to nawet nie jest początek symulacji. Należy zatem pomyśleć o zaokrąglaniu i przytaczaniu kilku zaledwie cyfr znaczących.

W 1963 roku Lorenz zainteresował się zjawiskiem konwekcji i jego opisem matematycznym przedstawionym przez Salzmana. Z tego opisu wybrał zaledwie trzy równania wiążące trzy zmienne. Podobnie jak poprzednio ich cechą była wrażliwość na warunki początkowe. Obecnie taką wrażliwość nazywamy **efektem motyla**: "*trzepot skrzydeł motyla na alpejskiej hali wywoła prąd powietrza, który stanie się wiatrem, który z kolei stanie się cyklonem, a ten zatopi statek w zatoce meksykańskiej*" **[10]**. Wnioskiem z tych rozważań było stwierdzenie, że każdy nieokresowy układ fizyczny jest nieprzewidywalny.

Otrzymane w wyniku rozwiązania równań różniczkowych trójki liczb mówiące o stanie układu w danej chwili reprezentują punkty określone w przestrzeni trójwymiarowej, można je przedstawić w postaci graficznej. Taka możliwość została wykorzystana. Otrzymano obraz trajektorii badanego układu w postaci podwójnej spirali. Na rysunku możemy dostrzec, że trajektoria owija się wokół lewego albo prawego ramienia spirali, zmieniając ramię w przypadkowy sposób.



Wykres wskazuje na bardzo ciekawą cechę badanego układu, jego uwięzienie w pewnym zakresie wartości, skupienie się wartości w ramach pewnego obiektu matematycznego zwanego atraktorem.

Atraktor przyciąga trajektorie, niezależnie od ich punktu startowego. Każdy punkt przestrzeni trójwymiarowej jest teoretycznie możliwy do osiągnięcia, ale tylko te naturalne (występujące w rzeczywistości) reprezentowane są przez atraktor.

Rozwijająca się teoria chaosu podważyła przekonanie, że proste układy zachowują się w sposób prosty, a skomplikowane w sposób skomplikowany, dając wiele przykładów obiektów prostych (opisywanych małą ilością równań) a zachowujących się tak skomplikowanie, że ich stanu nie sposób przewidzieć. Długi czas nauka nie zajmowała się takimi przypadkami, uważając je za marginalne. Teraz wiemy, że stanowią one naszą codzienność.

Ważniejsze źródła:

[IE] I. Ekeland — *Chaos*. Książnica, Katowice 1999.
[JG] J. Gleick — *Chaos*. Zysk i S-ka, Poznań 1996.
[IS] I. Stewart — *Czy Bóg gra w kości*. PWN, Warszawa 1994.
[MT] M. Tempczyk — *Teoria chaosu a filozofia*. CiS, Warszawa 1998.

Rysunek został wygenerowany przy użyciu programu *Mathematica 5.0*.

Przypisy:

[1] Chronologia, którą przyjęłam pochodzi z [IS], podobna jest zastosowana również w: *Od Newtona do Mandelbrota*, D. Stauffer, H.E. Stanley.
[2] Autor [MT] wspomina w swojej książce kilkakrotnie o braku zjawiska chaosu w ruchu planet, uzasadniając, że gdyby miał tu miejsce życie na Ziemi nie byłoby możliwe. Autor [IE] chaos ten nam uświadamia. Na możliwość występowania zjawiska chaosu w ruchu planet wskazuje również [IS], mówiąc jednocześnie, że zaobserwowanie tego zjawiska w czasie przekracza możliwości ludzkości.
[3] Za: *Nowy umysł cesarza*, R. Penrose.
[4] Natura jest zbyt skomplikowana, aby można było badać przypadki rzeczywiste. Zamiast tego rozpatruje się przypadki graniczne, nie mają one odzwierciedlenia w rzeczywistości, ale są łatwiejsze do zrozumienia. Wyniki tych badań stosuje się potem w rzeczywistym opisie przyrody.
[5] Jako ciekawostkę warto wspomnieć, że równania Hamiltona są słuszne dla dowolnego układu klasycznych równań ruchu, sprawdzają się w szczególnej teorii względności, przy pewnych założeniach w ogólnej teorii względności, oraz stanowią punkt wyjścia mechaniki kwantowej.
[6] Ciekawy esej mówiący o rozwoju zainteresowania pogodą w meteorologię można znaleźć w: *Matematyka współczesna*, red. L. A. Steen.
[7] Więcej o jego konstrukcji i różnych aspektach wykorzystania również jego następców można przeczytać w [JG], [IS] oraz w: *Skojarzenia*, J. Burke i *Przygody matematyka*, St. M. Ulam.
[8] O tym dlaczego i na jakiej podstawie możemy dopuszczać upraszczanie opisu przyrody w celach badawczych można przeczytać w: *Chaos w układach deterministycznych*, E. Ott.
[9] Nie wszystkie źródła, do których dotarłam, są zgodne, co do ilości tych cyfr, dlatego pomijam tutaj ich dokładne określenie. Faktem jest, że różnice dotyczyły części dziesięciotysięcznych lub mniejszych.
[10] Za [IE].

Anna Słota
Publicystka Racjonalisty. Matematyk z wykształcenia, pracuje jako administrator SI

Pokaż inne teksty autora

(Publikacja: 25-03-2004 Ostatnia zmiana: 24-08-2004)
Oryginał.. (http://www.racjonalista.pl/kk.php/s,3340)

Contents Copyright © 2000-2008 by Mariusz Agnosiewicz

Programming Copyright © 2001-2008 Michał Przech

Autorem tej witryny jest Michał Przech, zwany niżej Autorem.
Właścicielem witryny są Mariusz Agnosiewicz oraz Autor.

Żadna część niniejszych opracowań nie może być wykorzystywana w celach komercyjnych, bez uprzedniej pisemnej zgody Właściciela, który zastrzega sobie niniejszym wszelkie prawa, przewidziane w przepisach szczególnych, oraz zgodnie z prawem cywilnym i handlowym, w szczególności z tytułu praw autorskich, wynalazczych, znaków towarowych do tej witryny i jakiejkolwiek ich części.

Wszystkie strony tego serwisu, wliczając w to strukturę podkatalogów, skrypty JavaScript oraz inne programy komputerowe, zostały wytworzone i są administrowane przez Autora. Stanowią one wyłączną własność Właściciela. Właściciel zastrzega sobie prawo do okresowych modyfikacji zawartości tej witryny oraz opisu niniejszych Praw Autorskich bez uprzedniego powiadomienia. Jeżeli nie akceptujesz tej polityki możesz nie odwiedzać tej witryny i nie korzystać z jej zasobów.

Informacje zawarte na tej witrynie przeznaczone są do użytku prywatnego osób odwiedzających te strony. Można je pobierać, drukować i przeglądać jedynie w celach informacyjnych, bez czerpania z tego tytułu korzyści finansowych lub pobierania wynagrodzenia w dowolnej formie. Modyfikacja zawartości stron oraz skryptów jest zabroniona. Niniejszym udziela się zgody na swobodne kopiowanie dokumentów serwisu Racjonalista.pl tak w formie elektronicznej, jak i drukowanej, w celach innych niż handlowe, z zachowaniem tej informacji.

Plik PDF, który czytasz, może być rozpowszechniany jedynie w formie oryginalnej, w jakiej występuje na witrynie. **Plik ten nie może być traktowany jako oficjalna lub oryginalna wersja tekstu, jaki zawiera**.

Treść tego zapisu stosuje się do wersji zarówno polsko jak i angielskojęzycznych serwisu pod domenami Racjonalista.pl, TheRationalist.eu.org oraz Neutrum.eu.org.

Wszelkie pytania prosimy kierować do redakcja@racjonalista.pl